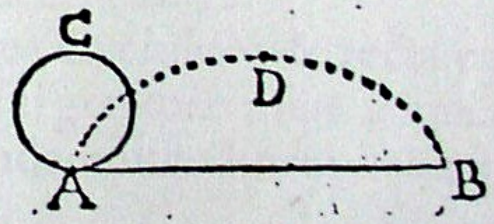
APPENDIX

De Dimensione Cycloidis.

LIBET hic appendicis loco addere solutionem problematis non iniucundi, & si materiā, propositionemque spectes, primo intuitu difficillimi. Torsit hoc, fefellitq. pluribus ab hinc annis Mathematicos nostri seculi primarios; frustrà enim tentata demonstratio euasit ab illorū manibus ob fallaciam experientiæ. Appensis namque ad libram manufactam spatijs figurarum materialibus, nescio quo fato, ea proportio quæ verè tripla est, semper minor quā tripla apparuit. Vnde factum est, quòd potius ob suspicionem incommensurabilitatis (vt ego credo) quàm ob desperationem demonstrationis, instituta contemplatio ab illis dimissa sit.



Suppositum est huiusmodi. Concipiatur super manente aliqua recta linea ab. circulus ac, contingens rectam ab. in puncto a. Noteturq; punctum a, tamquā fixum in peripheria circuli ac. Tum intelligatur super manente recta ab. conuerti circulum ac, motu circulari simul & progressiuo versus partes b: ita vt subinde aliquo sui puncto rectā lineā ab semper contingat, quousq. fixum punctum iterum ad contactum reuertatur, putà in b. Certum est, quòd punctum a fixum in peripheria circuli rotantis ac, aliquam lineam describet, surgentem primò à subiecta linea ab, deinde culminantem versus d; postremo pronam, descendētemque versus punctum b.

Vocata est à prædecessoribus nostris. Præcipue à Galileo iam supra 45. annum, huiusmodi linea adb. Cyclois, recta verò ab. basis cycloidis; At circulus ac, genitor cycloidis.

Proprietas, & natura cycloidis ea est, vt basis ipsius ab. æ-

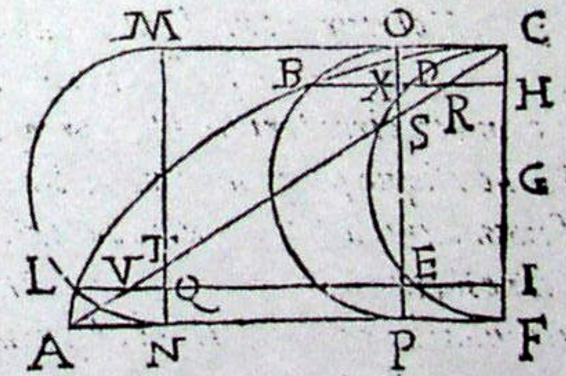
qualis sit peripharia circuli genitoris ac. *Quod quidem non adeo obscurum est: Nam tota peripharia* ac *se ipsam in conuersione commensurauit super manente recta* ab.

Quaeritur nunc quam proportionem habeat spatium cycloidale adb *ad circulum suum genitorem* ac*? Ostendemusque, Deo dante, triplum esse. Demonstrationes tres erunt, inter se penitus diuersae. Prima, & tertia per nouam Indiuisibilium Geometriam nobis amicissimam procedent: secunda verò per duplicem positionem, more veterum recepto; vt vtrisque fautoribus satisfiat. Ceterum, hoc moneo; principia ferè omnia, quibus aliquid per Indiuisibilium Geometriam demonstratur, ad solitam antiquorum demonstrationem indirectam reduci posse: quod à nobis factum est, vt in multis alijs, ita etiam in primo, & tertio sequentium Theorematum; sed ne lectoris patientia nimium adhuc abuteremur plura omittenda censuimus, tresq; tantum demonstrationes exibemus*

THEOREMA I.

Omne spatium quod sub linea Cycloide, & recta eius basi continetur, triplum est circuli sui genitoris; siue sesquialterum trianguli eandem basim, & eandem altitudinem habentis.

Esto Cyclois linea abc *descripta à puncto* c *circuli* cdef *dum ipse circumuertitur super manente basi* af. *(consideramus autem semicycloidem, & semicirculum tantum ad euitandam figurae confusionem.) Dico spatium* abcf *triplum esse semicirculi* cdef; *siue sesquialterum trianguli* acf.



Accipiantur duo puncta h, *&* i *in diametro* cf. *aequè remota à centro* g. *Ductisq.* hb, il cm *aequidistanter ipsi* fa, *transeant per puncta* b, *&* l *semicirculi* obp, mln, *equales ipsi* cdf, *& contingentes basim in punctis* pn.

Nanife-

Manifestum est rectas hd, ie, xb, ql *equales esse, per 14 Tertij, aequalesq. erunt arcus* ob, ln. *Item cum equales sint* ch if, *equales erunt* cr, ua *ob parallelas*.

Tota periphęria mln, *ob cycloidem, aequalis est rectę* af. *itēque arcus* ln *recta* an *ob eandem causam, cum arcus* ln. *seipsum super recta* an *commensurauerit, ergo reliquus arcus* lm, *reliquae rectę* nf *ęqualis erit. Eadem ratione arcus* bp. *rectę* ap, *& arcus* bo *rectę* pf, *aequalis erit*,

Iam recta an *aequalis est arcui* ln, *siue arcui* bo, *siue rectę* pf. *Ergo ob parallelas, ęquales erunt* at, fc. *Verum quia aequales erant etiam* cr, au. *reliquę* ut, fr *ęquales erunt. Propterea in triangulis aequiangulis* utq, rfx, *aequalia erunt latera homologa* uq, xr. *Patet itaque quod duae rectae* lu, br *simul sumptae aequales erunt duabus rectis* lq, bx, *nempe ipsis* ei, dh, *& hoc semper verum erit vbicunq. sumantur duo puncta* h, *&* i, *dumodo aequaliter a centro sint remota. Ergo omnes lineae figurae* albca *aequales sunt omnibus lineis semicirculi* cdef; *& ideò figura bilinearis* albca *aequalis erit semicirculo* cdef.

Sed triangulum acf *duplum est semicirculi* cdef. *(nam triangulum* acf *reciprocum est triangulo Propos. pr. Arch. de dimens. circ. cum latus* af *semiperiphaeriae, latus verò* fc *diametro sit aequale, vnde sequitur triangulum* acf *aequale esse integro circulo cuius diameter sit* cf.) *Ergo componendo, totum cycloidale spatium sesquialterum erit trianguli inscripti* acb; *Triplum verò semicirculi* cdef. *Quod erat.*

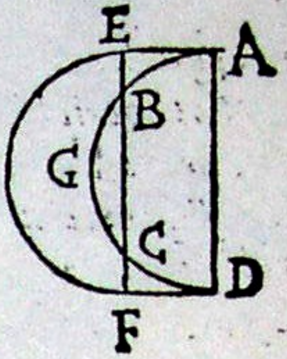
Lemma I.

Si super lateribus oppositis alicuius rectanguli AF, duo semicirculi descripti sint, EIF, AGD, erit figura sub periphærijs, & sub reliquis lateribus comprehensa ęqualis prędicto rectangulo.

Vocetur autem talis figura Arcuatum; tam si fuerit integra, quàm etiam ipsius partes, quando secta fuerit à linea ipsi fd *parallela*.

Demon-

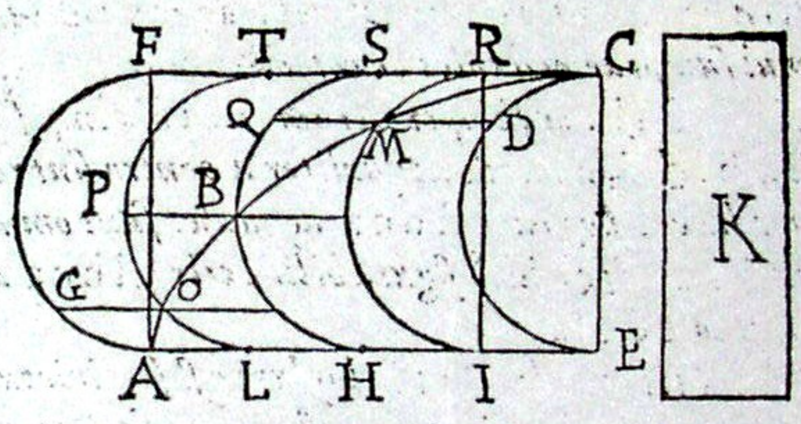
Demonstratur; quoniam cum sint aequales semicirc. dempto communi segmento b g c, *additisque communibus trilineis* e b a, c f d. *clarum erit propositum.*



Quando verò detur casus quod segmentum nullum sit, tunc breuior faciliorq. demonstratio erit. Facilè etiam per eandem prostapheresim ostenditur arcuatum sectum à linea ipsi fd *parallela çquale esse rectangulo aquealto, & super eadem basi constituto.*

Lemma II.

Esto linea cycloidalis a b c *descripta à puncto* c *semicirculi* c d e *dum conuertitur super manente* a e. *Compleatur rectangulū* a f c e,



fiatq. circa diametrum a f *semicirculus* a g f. *Dico cycloidem* a b c *secare bifariam arcuatum* a g f c d e.

Si enim ita non est, erit vtiq. alterum ex duobus trilineis f g a b c, a b c d e, *magis quam dimidium eiusdem arcuati. Esto & ponatur alterum ex ipsis (quodcunq. sit) puta* a b c d e *maius quàm dimidium arcuati. Sitq. excessus, quo trilineum superat semissem arcuati, aequalis spatio cuidam* K.

Secetur bifariam a e *in* h; *& iterùm* h e *in* i *& sic fiat semper donec rectangulum aliquod* i e c *minus reperiatur spatio* K. *Tunc diuidatur integra* a e *in particulas aquales ipsi* i e, *& per puncta diuisionum* l, h, i, *transeant semicirculi aequales ipsi* c d e *semicirculo, tangentes basim in punctis* l, h, i. *secantesq. cycloidem in* o, b, m, *per quae puncta agantur rectae* g o, p b, q m d *aequidistantes basi* a e.

Eri

Erit itaque arcuatum oh æquale ipsi gl: arcuatum verò bi æquale arcuato ph: & arcuatum me æquale arcuato qi. Propterea vniuersa figura inscripta in trilineo abcde constans ex arcuatis, æqualis erit figuræ eidem trilineo circumscriptæ, excepto tamen arcuato imrcde. Quod si figuræ circumscriptæ addas suum arcuatum imrcde, superabit circumscripta figura ipsam inscriptam excessu prædicti arcuati, siue rectangulo re, nempe minori excessu quam sit spatium K. Propterea inscripta in trilineo figura adhuc erit plusquàm dimidium arcuati agfcde. & ideo maior quam trilineum fgabc. Sed eadem æqualis est alteri figuræ ex arcuatis compositæ & in trilineo fgabc descriptæ: ostenditur infra ergò hæc inscripta figura maior esset suo trilineo fgabc. pars suo toto. quod esse non potest.

Quod inscriptæ figuræ sint æquales patet. Nam arcus ol æqualis est rectæ la, hoc est rectae ie, hæc est arcui rm (ob cycloidem.) Ergo arcuatum oh aequale erit arcuato mf. & sic de singulis.

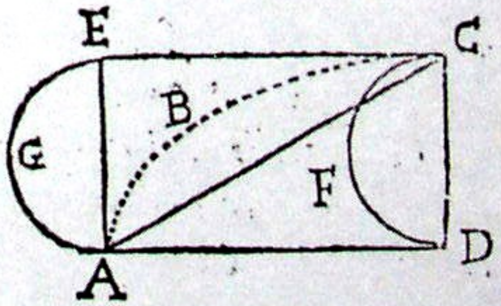
Si verò supponeremus trilineum fgabc maius quàm dimidium arcuati agfcde, constructio figurae, & demonstratio penitus eadem erit. Ergò concludemus cycloidem lineam abc bifariam secare arcuatum agfcde. Quod erat propositum.

THEOREMA II.

Spatium cycloidale triplum est circuli sui genitoris.

Esto cyclois abc descripta à pũcto c circuli cfd. dico spatium abcd triplũ esse semicirculi cfd.

Compleatur rectangulum adce; factoq. super ae semicirculo age, ducatur ac.



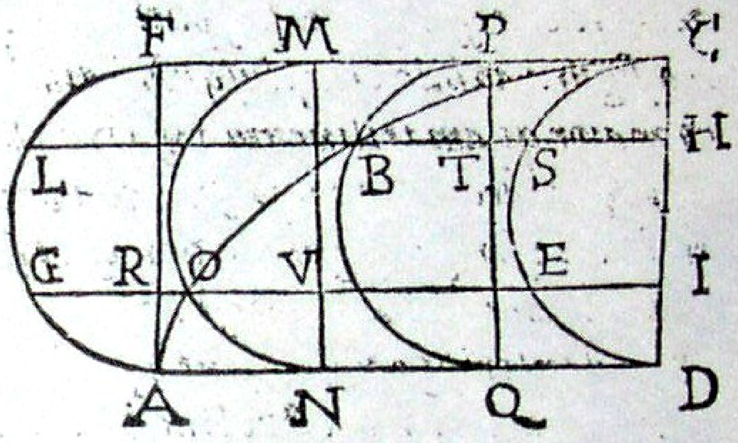
Triangulum adc duplum est semicirculi cfd (nam basis ad aequalis est periphaeriae cfd ob cycloidem, altitudo verò dc aqualis diametro) ideò rectangulum ed quadruplum erit eius-

M dem

dem semicirculi cfd. *Ergo arcuatum* agecfd *quadruplum erit eiusdem semicirculi: propterea trilineum* abcfd (*per lemma præcedens*) *duplum erit semicirculi*, & *componendo spatium* abcd *triplum erit eiusdem semicirculi* cfd.

THEOREMA III.

Omne spatium cycloidale triplum est circuli sui genitoris.



Esto cycloidalis linea abc *descripta à puncto* c *semicirculi* ced. *Dico spatium* abcd *triplum esse semicirc.* ced.

Compleatur rectangulum afcd; *factoq. semicirculo* agf, *accipiatur duo puncta* h, & i *in diametro* cd *æque remota à centro*, & *ducantur* hl, ig *æquidistantes ad* ad. *quæ cycloidem secent in quibusuis punctis* b, & o. *Agantur denique per* b, & o *duo semicirculi* pbq, mon, *vt in precedentibus factum est*.

Iam recta go, *equalis est recte* ru (*cum æquales sint* gr, ou, & *communis* ro) *siue æqualis est recte* an, *nempe arcui* on (*ob cycloidem*) *vel arcui* pb. *siue recte* pc, *vel* th, *vel* bs.

Eodem prorsus modo, quo demonstrauimus rectam go *æqualem esse rectae* bs, *demonstrantur omnes & singulae lineae trilinei* fgabc *aequales omnibus lineis trilinei* abced. *Proptere a dicta trilinea inter se aequalia erunt. Ergo vt in praecedenti Theoremate demonstrabitur cycloidale spatium triplum esse semicirculi* ced. *Quod erat &c.*

FINIS.